



*Université Frères Mentouri Constantine*



Fatiha .BOUSSALIH

# Table des matières



<b>Objectifs</b>	<b>4</b>
<b>I - Pré-requis et test de pré-requis</b>	<b>5</b>
1. Pré-requis .....	5
2. test de pré-requis .....	5
<b>II - Exercice</b>	<b>6</b>
<b>III - INTRODUCTION A LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX</b>	<b>7</b>
1. Objectifs spécifiques .....	7
2. Introduction à la résistance des matériaux .....	8
3. Champs d'application .....	9
4. Hypothèses de la résistance des matériaux et de l'élasticité .....	10
5. Liaisons mécaniques –réactions d'appuis. ....	10
5.1. Appui simple ( Appui mobile) .....	11
5.2. Appui double ( Appui fixe) .....	11
5.3. Liaison rotule (Articulation sphérique) .....	12
5.4. Encastrement dans un plan .....	12
5.5. Représentations simplifiées des différentes liaisons .....	13
6. Actions extérieures et torseur de cohésion (Efforts internes) .....	13
6.1. Définition de l'action mécanique .....	13
6.2. Caractéristiques d'une force .....	13
6.3. vecteur-force .....	14
6.4. Moment d'un vecteur par rapport à un point .....	15
6.5. Actions extérieures .....	15
6.6. Torseur de cohésion .....	16
7. Détermination des forces intérieures .....	17
8. Diagrammes des efforts intérieurs .....	18
<b>IV - ÉTAT DE CONTRAINTE ET DE DÉFORMATION</b>	<b>19</b>
1. Objectifs spécifiques .....	19
2. Notion de contrainte .....	20
3. État de contrainte en un point .....	21
3.1. État de contrainte plan .....	22
4. Loi de comportement .....	22
5. Contraintes sur un plan incliné .....	24
5.1. Contraintes principales .....	25
5.2. Contraintes tangentielles extremum .....	26

6. Cercle de Mohr .....	27
7. Relation entre contrainte et déformation relative. ....	28
7.1. Loi de Hooke. ....	28
7.2. Allongement relatif, ou déformation .....	29
7.3. Module d'élasticité longitudinale $E$ (ou module de Young): .....	29
<b>V - ÉTUDE DE SOLlicitATIONS SIMPLES</b> .....	<b>30</b>
1. TRACTION SIMPLE .....	31
1.1. Objectifs spécifiques .....	31
1.2. Torseur de cohésion dans $(G; x; y; z)$ : .....	31
1.3. Contrainte .....	32
1.4. Loi de Hooke .....	32
1.5. Condition de résistance à la traction .....	33
2. COMPRESSION SIMPLE .....	34
2.1. Condition de résistance à la compression .....	34
2.2. Systèmes isostatiques et hyperstatiques .....	35
2.3. Phénomène de concentration de contraintes .....	37
3. Exercice .....	38
4. CISAILLEMENT SIMPLE .....	39
4.1. Objectifs spécifiques .....	39
4.2. Torseur de cohésion dans $(G; x; y; z)$ .....	40
4.3. Contrainte .....	41
4.4. Distribution des contraintes tangentielles .....	43
4.5. Déformation angulaire .....	44
4.6. Condition de résistance .....	45
4.7. Assemblage par rivets .....	45
5. Exercice .....	45
6. État de cisaillement pur .....	46
7. TORSION .....	46
7.1. Objectifs spécifiques .....	46
7.2. Moment de torsion .....	46
7.3. Moment d'inertie polaire .....	46
7.4. Contrainte de cisaillement en torsion .....	47
7.5. Déformation de cisaillement .....	47
7.6. Angle de torsion .....	48
7.7. Torseurs de cohésion, dans $(G;x;y;z)$ .....	48
7.8. Angle unitaire de torsion .....	49
7.9. La contrainte tangentielle due à la torsion .....	49
7.10. Relation entre moment et angle de torsion. ....	49
7.11. Condition de résistance .....	49
8. Exercice .....	49
9. FLEXION .....	50
9.1. Objectifs spécifiques .....	50
9.2. Hypothèses .....	50
9.3. Différents types de flexion .....	51
9.4. FLEXION PURE .....	51
9.5. FLEXION SIMPLE .....	53
9.6. Calcul de résistance en flexion .....	55
9.7. Système hyperstatique (statiquement indéterminé) .....	57
10. Exercice .....	60
<b>Abréviations</b> .....	<b>61</b>
<b>Références</b> .....	<b>62</b>

# Objectifs

A l'issue de ce cours, l'apprenant sera capable de :

- S'entraîner aux calculs et manipuler des équations un peu plus complexes, en mettant en application les théories, après avoir reconnu le type de sollicitations.
- Investiguer adéquatement pour une meilleure conception basée sur des critères.
- Dimensionner tous types d'éléments de structures isostatiques simples réalisés en acier.
- Vérifier que les déformations induites par les charges sont inférieures aux limites acceptables en fonctionnement, en contrôlant les dimensionnements des pièces.
- Réaliser des structures stables, résistantes et économiques.

# Pré-requis et test de pré-requis



## 1. Pré-requis

- Calculs vectoriels.
- Statique des solides.

## 2. test de pré-requis

On trouve un questionnaire, type QCM, comportant des questions de cours : il est nécessaire de le faire seul, chez soi, C'est un travail préparatoire, qui permet de s'assurer que les notions de base requises pour la résolution des exercices sont bien comprises. Une correction sera fournie au thème suivant, et l'étudiant pourra alors s'évaluer selon le barème ci-dessous.

Chaque question est notée de 0 à 2 points :

- Pas de réponse : 0 point
- Aucune erreur : 2 points
- 1 erreur : 1 point
- 2 erreurs et plus : 0 point

Le niveau d'acquisition des connaissances est évalué en fonction du nombre de total de points recueillis pour l'ensemble des questions :

Total (exemple, avec 5 questions, donc un maximum de 10 points)

- Connaissances acquises supérieur à 7 ?
- Connaissances en voie d'acquisition de 4 à 7 ?
- Connaissances non acquises Inférieures à 4 ?

# Exercice



[Solution p ]

## Exercice

---

*Une force appliquée à un corps peut permettre de le mettre en mouvement.*

- Vrai
- Faux

## Exercice

---

*Une force appliquée à un corps peut contribuer à le mettre en équilibre et le rendre immobile.*

- Vrai
- Faux

## Exercice

---

*Si toutes les forces sont appliquées à un même solide se compensent, alors celui-ci est en équilibre.*

- faux
- vrai

## Exercice

---

*Une force appliquée à un corps déjà en mouvement perturbe sa trajectoire initiale*

- Faux
- Vrai

## Exercice

---

*Si une force impose à un solide de décrire un mouvement circulaire et uniforme, alors cette force est aussi responsable de l'augmentation progressive de vitesse du solide.*

- Faux
- vrai



## 2. Introduction à la résistance des matériaux

La résistance des matériaux est la science du dimensionnement, afin d'éviter la rupture et entraîner des déformations élastiques, après étude statique ou dynamique. C'est un outil indispensable à toute modélisation en calcul des structures [1].<sup>↗</sup>

Dans le cadre des sollicitations d'un élément de la structure, la résolution du problème fait appel à la RDM pour calculer :

- La grandeur des efforts internes du matériau ;
- Les déformations ;
- Les déplacements ;
- La distribution des contraintes ;
- Le choix du matériau ;
- Le dimensionnement et la vérification.

La résistance des matériaux est un processus de fabrication entre les étapes de conception et de réalisation d'une pièce. Cette conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité et d'économie.



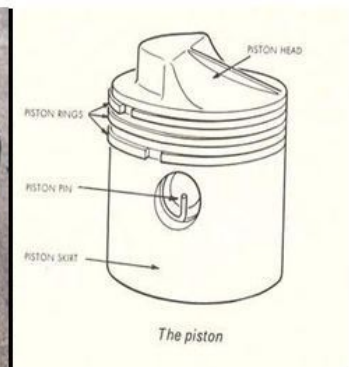
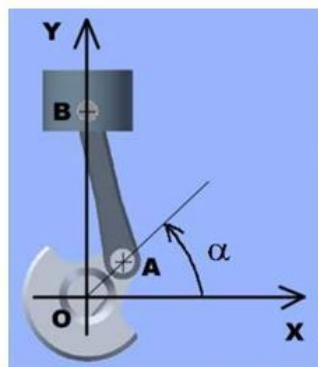
### 3. Champs d'application

La RDM est couramment utilisée dans de différents domaines d'applications tels que :

- Génie mécanique (piston, essieu ,Jante , tambour ,.....).
- Génie maritime (piston, bielle ,.....).
- Génie civil (bâtiments, turbine, structures métalliques...).
- Aéronautique ( aile).
- La physique du solide (acier, cuivre .....).
- Génie électrique (câbles, pylônes, centrales, .....).



a) Viaduc b) aile d'avion c) pylône



d) Bielle manivelle ,e ) essieu ,f ) piston Exemples d'application de la RDM

## 4. Hypothèses de la résistance des matériaux et de l'élasticité

### 1. Homogénéité

Un milieu est dit homogène s'il existe une configuration particulière qu'on prend pour référence dans laquelle la masse volumique est constante et si les lois de comportement sont indépendantes de la particule considérée.

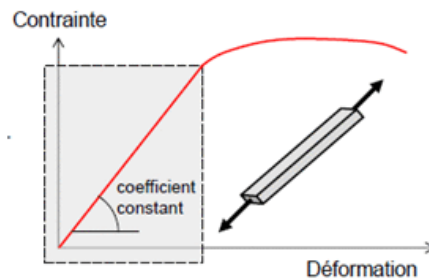
### 2. Isotropie

Un milieu est dit isotrope si les propriétés sont les mêmes dans toutes les directions.

### 3. L'élasticité et la réversibilité du matériau

Lors du chargement et le déchargement, le matériau revient à sa position initiale.

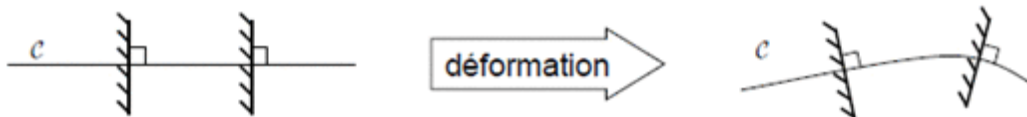
Les déformations dues aux charges sont négligeables par rapport aux dimensions des éléments.



*Élasticité du matériau*

### 4. Hypothèse de Navier Bernoulli :

Les sections droites de la poutre demeurent planes et perpendiculaires à l'axe de celle-ci après déformation.



### 5. Hypothèse de saint venant :

Tous les efforts qui interviennent dans la théorie peuvent être représentés par leur torseur résultant.

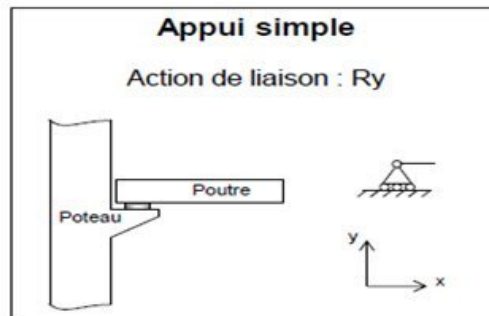
## 5. Liaisons mécaniques –réactions d'appuis.

*Liaisons mécaniques* : On appelle, liaison tout ce qui limite les déplacements d'un corps donné dans l'espace ou contact d'assemblage entre les différents solides.

*Réactions d'appuis* : On appelle forces de liaisons, de réaction, les forces avec lesquelles les liaisons données agissent sur un corps limitant ses déplacements.

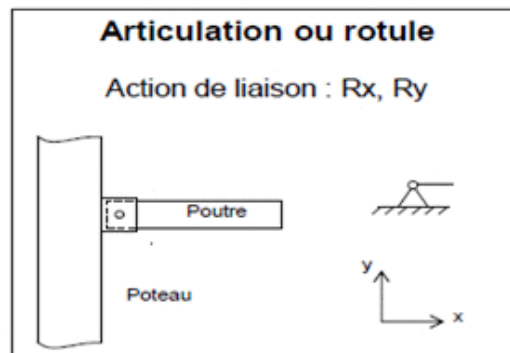
### 5.1. Appui simple ( Appui mobile)

Appui simple permet la translation  $\Delta_x$  introduit une inconnue dans la direction perpendiculaire et une rotation  $\Omega$  autour de l'axe perpendiculaire au plan de la liaison.



### 5.2. Appui double ( Appui fixe)

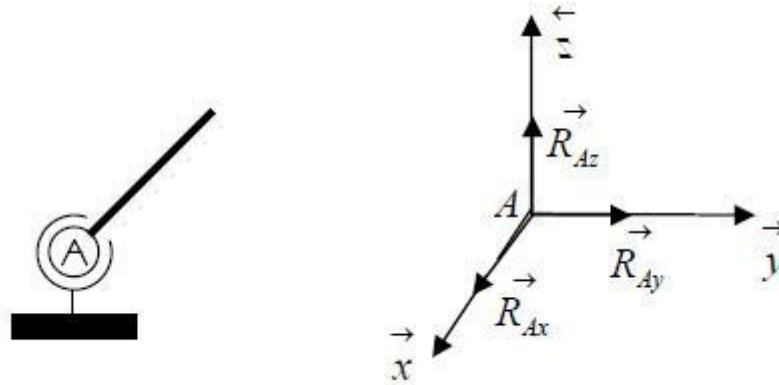
L'articulation ne permet pas la translation dans les deux sens du plan représentés par  $\Delta_x$  et  $\Delta_y$ . Elle permet uniquement une rotation  $\Omega$  autour de l'axe perpendiculaire au plan de la liaison.



### 5.3. Liaison rotule (Articulation sphérique)

La réaction au point A à 3 degrés de liberté (rotations) et trois composantes

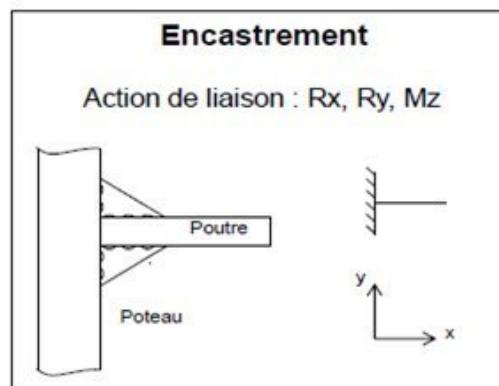
$$\vec{R}_{Ax}, \vec{R}_{Ay}, \vec{R}_{Az}$$



*Liaison sphérique*

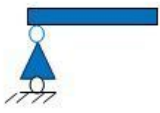

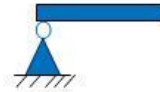
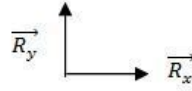
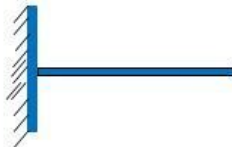
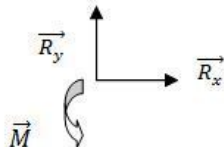
### 5.4. Encastrement dans un plan

L'encastrement ne permet pas la translation de la section droite de l'appui dans les deux sens du plan  $\Delta_x$  et  $\Delta_y$  et la rotation  $\Omega$  du moment  $M_z$  qui est perpendiculaire en plan moyen donc l'encastrement introduit trois inconnues .



## 5.5. Représentations simplifiées des différentes liaisons

Les différentes liaisons sont schématisées sur le tableau suivant :

Modélisation		Inconnues de liaison
	Appui mobile articulé	
	Appui fixe articulé	
	Encastrement	

## 6. Actions extérieures et torseur de cohésion (Efforts internes)

### 6.1. Définition de l'action mécanique

Le mouvement d'un objet est provoqué par une action, appelée action mécanique. Les actions exercées sur un objet peuvent le mettre :

- En mouvement.
- Modifier sa trajectoire
- Le déformer.

### 6.2. Caractéristiques d'une force

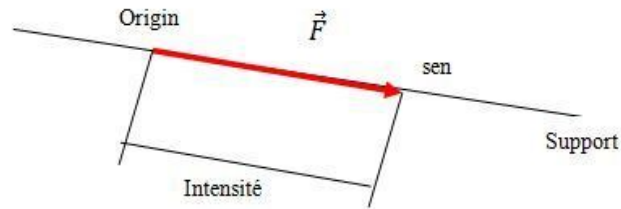
Une force est déterminée par :

- La direction ( Support).
- Le sens .
- L'intensité .
- Le point d'application.

### 6.3. vecteur-force

La force est une grandeur dirigée, elle est représentée par un vecteur définie par :

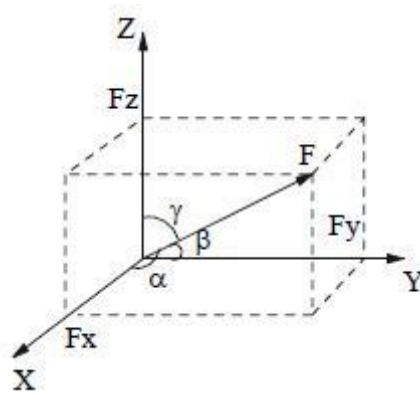
- Le point d'application.
- Le support.
- Le sens.
- L' intensité.



*Représentation du vecteur force*

Dans un repère cartésien la force ( $F$ ) forme respectivement avec les axes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  les angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Les trois projections de cette force selon les axes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  sont :

$$F_x = F \cos \alpha, F_y = F \cos \beta, F_z = F \cos \gamma$$



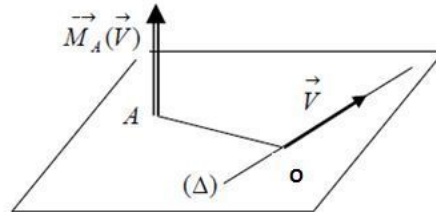
Ces composantes sont souvent représentées sous la forme matricielle suivante :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

### 6.4. Moment d'un vecteur par rapport à un point

Le moment d'un vecteur  $V$  d'origine  $B$  par rapport à un point  $A$  est égal au produit vectoriel du vecteur position  $AO$  par le vecteur  $V$ , Il s'écrit

$$\vec{M}_A(\vec{V}) = \vec{AO} \wedge \vec{V}$$

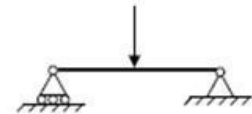


### 6.5. Actions extérieures

Soit un corps, soumis à plusieurs actions extérieures (poids propre, force concentrée, charges...) en se référant au données du cahier de charges tels que: la nature du matériau, masse volumique.



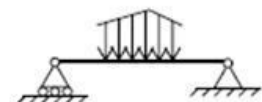
Situation réelle (force concentrée)



Modèle



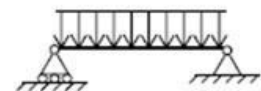
Situation réelle (charge non uniformément répartie)



Modèle



Situation réelle (charge uniformément répartie – poids propre)



Modèle

*Modélisation des charges extérieures*

## 6.6. Torseur de cohésion



### Définition

L'action entre les deux tronçons est une action d'encastrement qui se modélise par une résultante et un moment

$$\vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} = N \vec{i} + T_y \vec{j} + T_z \vec{k}$$

$$\vec{M}_{O(2 \rightarrow 1)} = M_t \vec{i} + M_{f_y} \vec{j} + M_{f_z} \vec{k}$$

- N effort normal (traction ou compression) porté par la ligne moyenne.
- $T_y$  et  $T_z$  efforts tranchants perpendiculaires à la ligne moyenne
- $M_t$  Moment de torsion portée par la ligne moyenne.
- $M_{f_y}$  et  $M_{f_z}$  Moments fléchissant ou de flexion perpendiculaires à la ligne moyenne.

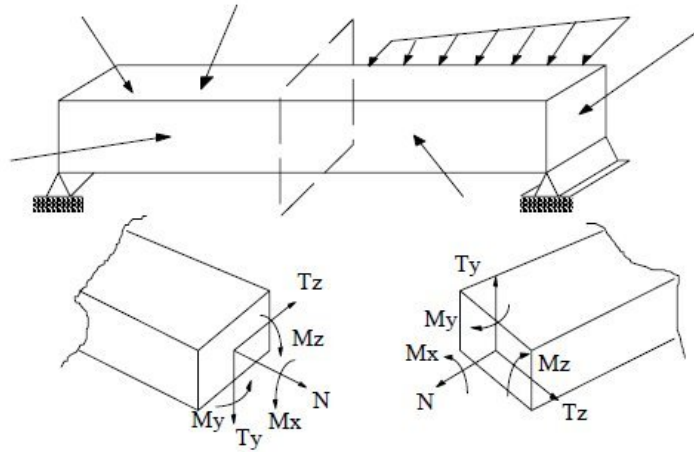
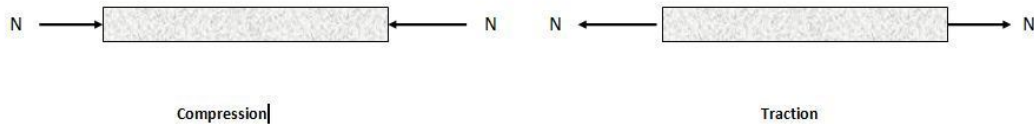


Illustration d'une coupe fictive des efforts internes.

### 6.6.1. Effort Normal

La composante N de la résultante F est la somme des projections de toutes les forces intérieures selon l'axe longitudinal de l'élément.

Convention : N est positif si il s'agit d'une traction et négatif dans le sens contraire





### 6.6.2. Efforts tranchants

$T_y$  et  $T_z$  sont perpendiculaires à la ligne moyenne et représentent la projection de toutes les forces intérieures sur les axes centraux principaux de la section. Ces efforts tranchants provoquent le cisaillement dans la direction des axes  $y$  et  $z$ .

Convention :  $T$  est positif quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens d'une aiguille d'une montre.

### 6.6.3. Moments fléchissant

$M_y$  et  $M_z$  représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures par rapport aux axes d'inerties  $y$  et  $z$  principaux de la section.

Convention :  $M_y$  et  $M_z$  sont positifs si les fibres inférieures sont tendues et les fibres intérieures sont comprimées.

### 6.6.4. Torsion et moment de torsion

#### Torsion

La torsion est la sollicitation subie par un corps soumis à l'action d'un couple de forces opposées agissant dans les plans parallèles et dont l'élément de réduction est un moment agissant dans l'axe de la barre.

#### Moment de torsion

$M_x$  est le moment de torsion qui représente la somme de toutes les forces intérieures par rapport à l'axe de la barre.

Convention :  $M_x$  est positif lorsqu'il tend à tourner le corps dans le sens inverse d'une aiguille d'une montre.

## 7. Détermination des forces intérieures



### Définition

La force intérieure est une exercée par une partie du système sur une partie du système.

La méthode des sections consiste à couper la barre en deux tronçons et à étudier l'équilibre de chacun de ces tronçons.

A l'aide de cette méthode nous pouvons déterminer les efforts internes. Cette méthode est basée sur le fait que dans chaque partie de cet élément sous l'influence du chargement extérieur est équilibrée par un système de forces internes agissant dans cette section [1].

Afin de pouvoir déterminer les efforts internes il suffit de :

- Découper en différents tronçons selon les actions mécaniques rencontrées selon la géométrie de la ligne moyenne.
- Écrire le PFS sur chaque tronçon dans le repère local.
- On isole la partie droite ou gauche.
- Déterminer des composantes d'efforts internes grâce au bilan des actions extérieures [2].



### Remarque

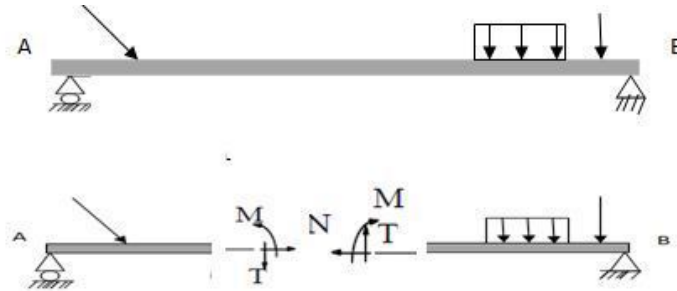
La somme des forces intérieures d'un corps indéformable est nulle



### Exemple

Soit, la poutre AB soumise au chargement extérieur indiqué dans la figure ci-dessous

Pour déterminer les efforts internes il suffit d'effectuer une section dans la poutre, les valeurs de  $N$ ,  $T$  et  $M$  sont égaux à la somme algébrique des forces et des moments extérieurs agissant sur l'une des partie ( droite ou gauche) de l'élément sélectionné



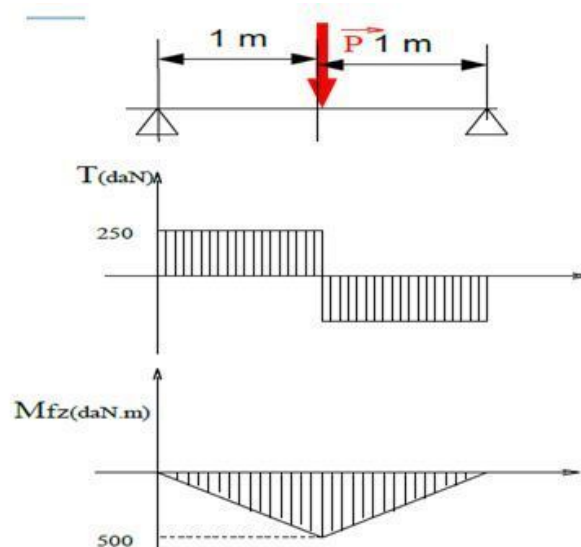
## 8. Diagrammes des efforts intérieurs

L'établissement des diagrammes correspondant aux différentes sollicitations, nous permet d'évaluer la section la plus dangereuse nécessitant une vérification de la résistance.



### Exemple

La poutre ci-dessous, de longueur 2 mètres, est sur deux appuis, soumise a une charge centrée de 500 daN



Solution

Le diagramme montre les cas les plus défavorables du moment fléchissant et de l'effort tranchant :

$$M_{fz} = 500 \text{ daNm}, T = 250 \text{ daN}.$$

# ÉTAT DE CONTRAINTE ET DE DÉFORMATION

IV

Objectifs spécifiques	19
Notion de contrainte	20
État de contrainte en un point	21
Loi de comportement	22
Contraintes sur un plan incliné	24
Cercle de Mohr	27
Relation entre contrainte et déformation relative.	28

## 1. Objectifs spécifiques

A l'issue de ce chapitre l'étudiant sera capable de :

- Appréhender la notion de vecteur contrainte, état de contrainte, tenseur de contrainte.
- Déterminer les contraintes au sein de la matière.
- représenter l'état de contrainte plan sur un cercle de Mohr.
- Identifier la loi de Hooke.

Le temps alloué à ce chapitre est : 2 semaines.

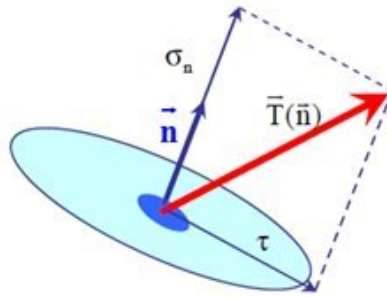
## 2. Notion de contrainte

Le tenseur des efforts internes n'est qu'une vision globale au niveau de la section considérée. Pour déterminer la répartition de ces efforts dans la surface de la section on fait appel à la notion de contrainte qui permet de passer de l'échelle la plus globale (actions extérieures à la structure) à une échelle très locale cohésion de la matière alors, que se passe-t-il, localement, en chaque point de l'élément ?[2]?

En Résistance du matériau une contrainte mécanique est une force divisée par une surface.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

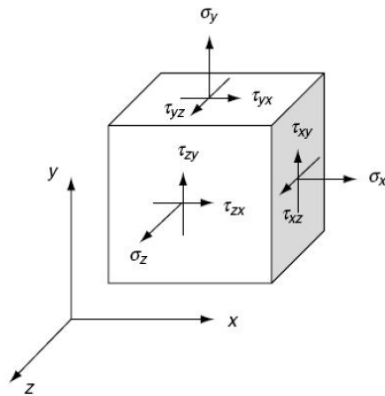
Le vecteur contrainte peut être décomposé en une composante normale et une composante tangentielle



*Projection du vecteur contrainte*

### 3. État de contrainte en un point

L'ensemble des contraintes normales et tangentielles qui s'appliquent sur un point d'un corps et dans toutes les directions est appelé « *état de contrainte* »



*Représentation de l'état de contrainte en un point*

Représentation de l'état de contrainte en un point par un tenseur

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

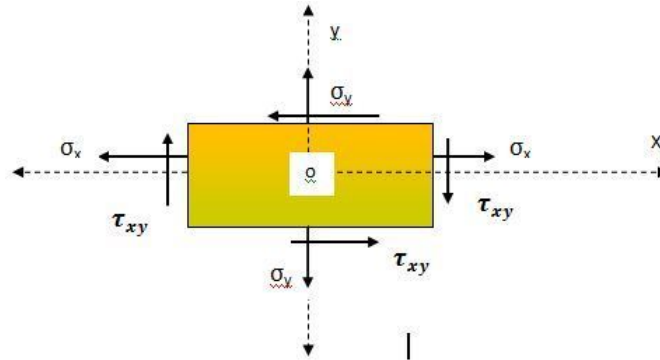
Les contraintes représentent respectivement les contraintes normales selon les axes x ,y, z avec

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \ ; \ \tau_{xz} = \tau_{zx} \ ; \ \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

### 3.1. État de contrainte plan

Dans le cas de l'état de contrainte plan le tenseur de contrainte est représenté comme suit

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$$



Représentation de l'état de contrainte plan

## 4. Loi de comportement

La représentation tensorielle de la loi de comportement est donnée par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

Les tenseurs des rigidités  $C_{ijkl}$  comporte = 81 composantes et de même pour  $S_{ijkl}$ , la symétrie des tenseurs de contraintes  $\sigma_{ij}$  et de déformation  $\varepsilon_{ij}$  réduit le nombre des constantes élastiques à 21 pour l'anisotropie complète.

La loi de Hooke relie les contraintes aux déformations par l'intermédiaire d'une matrice de rigidité dans le cadre des déformations élastiques.

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad i = 1, 2, 3$$

$C_{ijkl}$ : Le tenseur de rigidité

$S_{ijkl}$  : Le tenseur de souplesse

$\sigma_{ij}$  : Le tenseur de contraintes

$\varepsilon_{ij}$  : Le tenseur des déformations

Les  $S_{ijkl}$  sont les 81 composantes du tenseur des complaisances élastiques ou tenseur de souplesse  $S$ .

La notation matricielle permet d'écrire matériellement

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}, \quad \{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\}$$

En conclusion en tout point  $M$  d'un milieu continu, l'état des contraintes est entièrement déterminé par la connaissance des contraintes. Pour l'anisotropie 21 constantes indépendantes sont nécessaires.

Les lois de comportement expriment la relation qui existe entre les contraintes et les déformations d'un corps élastique (Lois de Hooke). Ces relations ont été obtenues à la suite de nombreuses observations expérimentales.

Pour un corps isotrope se déformant linéairement, les lois de comportement sous forme matricielle sont:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}$$

où

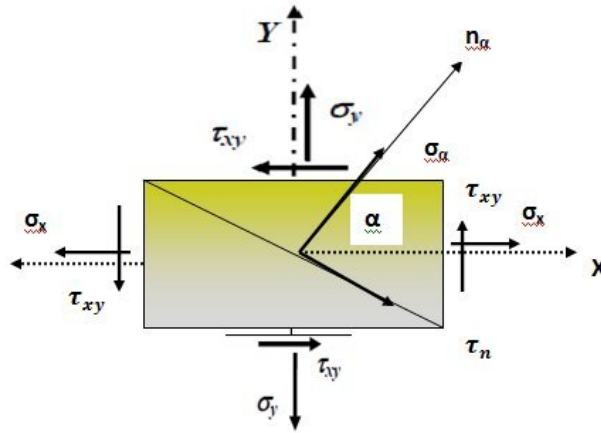
$\{\sigma\}$  Vecteur des contraintes.

$[C]$  Vecteur des déformations

$\{\varepsilon\}$  Vecteur des constantes élastiques

## 5. Contraintes sur un plan incliné

Soit l'état de contrainte plan dont la normale fait un angle  $\alpha$  avec l'axe  $ox$  comme le montre la figure ci-dessous



État de contrainte sur un plan incliné.

$$\sum F_n = 0 \Leftrightarrow \sigma_\alpha \cdot S_\alpha - \sigma_x \cdot S_x \cdot \cos \alpha - \sigma_y \cdot S_y \cdot \sin \alpha + \tau_{xy} \cdot S_x \cdot \sin \alpha + \tau_{xy} \cdot S_y \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_t = 0 \Leftrightarrow \tau_\alpha \cdot S_\alpha - \sigma_x \cdot S_x \cdot \sin \alpha + \sigma_y \cdot S_y \cdot \cos \alpha - \tau_{xy} \cdot S_x \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot S_y \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sigma_\alpha \cdot 1 - \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha - \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \cdot \cos \alpha \sin \alpha + \tau_{xy} \cdot \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\tau_\alpha \cdot 1 - \sigma_x \cdot \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_y \cdot \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{xy} \cdot \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \cdot \sin^2 \alpha = 0$$

Des relations trigonométriques:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

On obtient:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

|



## 5.1. Contraintes principales

Les contraintes normales et tangentielles prennent des valeurs différentes pour des raisons de résistance, les valeurs de ces contraintes maximales et minimales sont données par les équations suivantes

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Les contraintes tangentielles sont nulles sur les plans principaux.

$$\tau_{\alpha} = 0$$

- Les angles notés  $\alpha$  entre l'axe des x et les plans dans lesquels apparaissent les contraintes principales sont données par la formule suivante :

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = -\frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$$

## 5.2. Contraintes tangentielles extremum

les contraintes tangentielles qui s'y trouvent sont extremum:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{min} = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

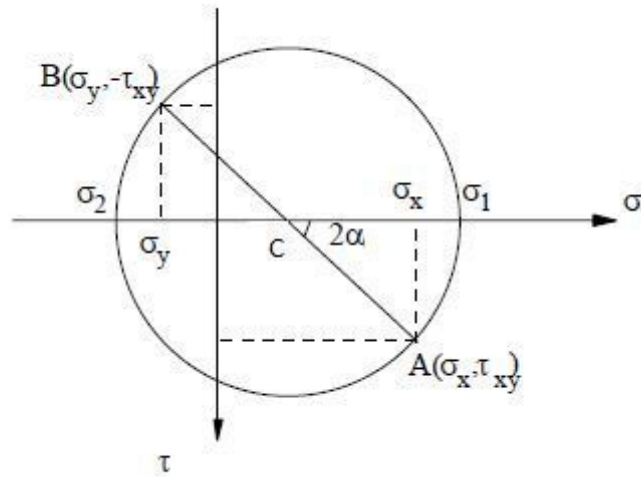
- La contrainte normale à ces plans est donnée par l'expression suivante:

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

## 6. Cercle de Mohr

Pour tracer le cercle de Mohr il suffit de :

- Fixer les points A ( $\sigma_x, \tau_{xy}$ ) et B ( $\sigma_y, \tau_{xy}$ ) sur un repère perpendiculaire et orthonormé ( $O, \sigma, \tau$ ).
- Déterminer le point C, point d'intersection de la droite AB et l'axe des abscisses.

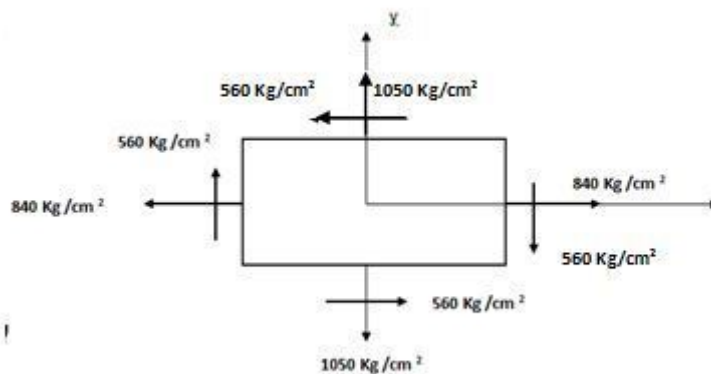


*Cercle de Mohr*

Exercice :

Considérons l'état plan de contraintes au point P représenté sur la figure ci-dessous

- 1- Écrire le tenseur des contraintes au point P dans le repère ( $O, x, y, z$ ).
- 2- Représenter l'état de contrainte au point P à l'aide du cercle du Mohr .
- 3- A l'aide du cercle du Mohr : déterminer les éléments principaux des contraintes.
- 4- Calculer les valeurs des contraintes de cisaillement extrêmes.

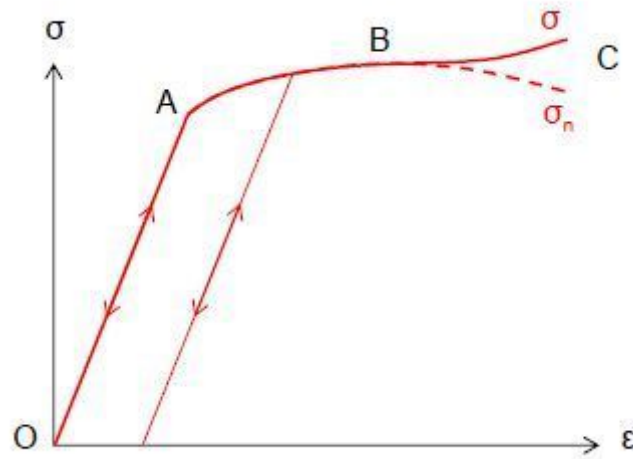


## 7. Relation entre contrainte et déformation relative.

### 7.1. Loi de Hooke.

La relation contrainte  $\sigma$  et déformation  $\varepsilon$  est représentée par un segment. On observe dans le palier OA une proportionnalité linéaire entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$ , qui représente le domaine élastique appelé loi de Hooke donnée par la relation suivante:

$$\sigma = \underline{\underline{E}} \cdot \varepsilon$$



*Courbe contrainte -déformation*

Durant le chargement et le déchargement de la barre, la barre reprend sa forme initiale (palier (OA) élastique). La pente  $E$  de la droite (OA) est appelée module d'élasticité linéaire ou module de Young représentant le rapport entre la contrainte  $\sigma$  et la déformation  $\varepsilon$ .

La partie (AC) représente la domaine la plasticité. Dans ce cas, la barre ne reprend pas sa forme initiale.

## 7.2. Allongement relatif, ou déformation $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \text{constante}$$



- $L_0$  : longueur avant déformation (mm)
- $L$  : longueur après déformation (mm)
- $\Delta L$  : allongement de la poutre (mm)

## 7.3. Module d'élasticité longitudinale $E$ (ou module de Young):

Cette grandeur caractérise la pente de la droite et l'élasticité du matériau dans le sens longitudinal,

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{Unité : N/mm}^2 \text{ (ou MPa)}$$



### *Remarque*






Quand le module de Young  $E$  du matériau, croît, sa rigidité augmente.

# ÉTUDE DE SOLLICITATIONS SIMPLES



TRACTION SIMPLE	31
COMPRESSION SIMPLE	34
Exercice	38
CISAILLEMENT SIMPLE	39
Exercice	45
État de cisaillement pur	46
TORSION	46
Exercice	49
FLEXION	50
Exercice	60

Les sollicitations simples se représentent en traction ou compression, le cisaillement, la torsion , la flexion, Quelques sollicitations simples sont données sur le tableau ci-dessous:

Cas	Exemple	Composante			
		N	T	$M_t$	$M_f$
Traction		N	0	0	0
Cisaillement		0	T	0	0
Torsion		0	0	$M_t$	0
Flexion pure		0	0	0	$M_f$
Flexion simple		0	T	0	$M_f$



# 1. TRACTION SIMPLE

## 1.1. Objectifs spécifiques

A l'issue de ce chapitre l'étudiant sera capable de :

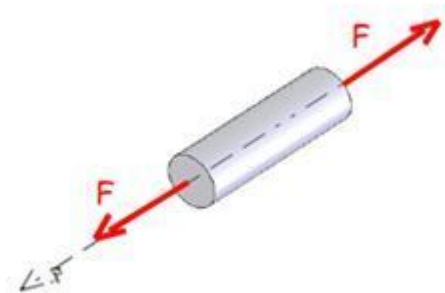
- Définir et identifier les sollicitations axiales.
- Déterminer les dimensions transversales de la pièce.
- Calculer les déformations longitudinales dues aux sollicitations axiales.

Le temps alloué à ce chapitre est : 1 semaine.



### Définition

Lorsque un corps est soumis à deux efforts qui tendent à l'allonger, on dit qu'il est sollicité en traction.



## 1.2. Torseur de cohésion dans $(G; x; y; z)$ :

$$\left\{ T_{\text{coh}} \right\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

### 1.3. Contrainte

$$\sigma = \frac{N}{A} = E \cdot \varepsilon$$

On considère une barre rectiligne, de section  $A$ , la contrainte est répartie de façon uniforme dans toute la section.

$N$  : effort normal (N)

$A$  : section sollicitée (mm<sup>2</sup>)

$\sigma$  : contrainte normale (MPa ou N/mm<sup>2</sup>)



#### Complément

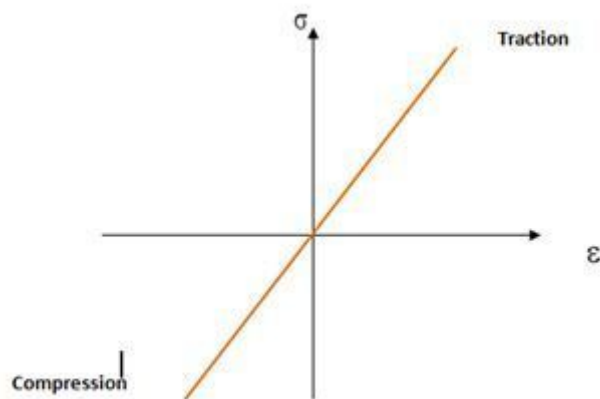
L'effort normal dans une section est la résultante des charges axiales s'exerçant sur la section.

Le diagramme de l'effort normal est obtenu par la méthode des sections en effectuant une coupe au niveau de chaque variation de charge.

### 1.4. Loi de Hooke

- Les contraintes et les déformations sont proportionnelles aux forces extérieures

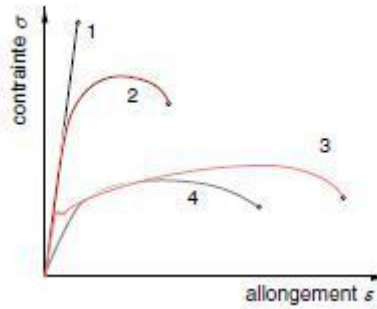
$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{et} \quad \varepsilon = \Delta \frac{L}{L_0} \quad \text{Avec} \quad \Delta L = \frac{N L_0}{E A}$$







### Exemple



Courbe contrainte -déformation : L'acier trempé (1) ,L'acier trempé et revenu (2) , L'acier recuit (3) , d'aluminium (4),

La courbe contrainte déformation est une courbe intrinsèque du matériau.

## 1.5. Condition de résistance à la traction

Pour que la poutre sollicitée à la traction résiste en toute sécurité il faut que :

$$\sigma_{maxi} = \frac{N}{A} \leq Rpe$$

Cette inéquation permet de déterminer les dimensions transversales de la poutre. Elle est appelée inéquation d'équarrissage.

Avec :  $Rpe = (Re/s)$  appelée résistance pratique d'extension.

- $Re$  : limite élastique
- $s$  : coefficient de sécurité

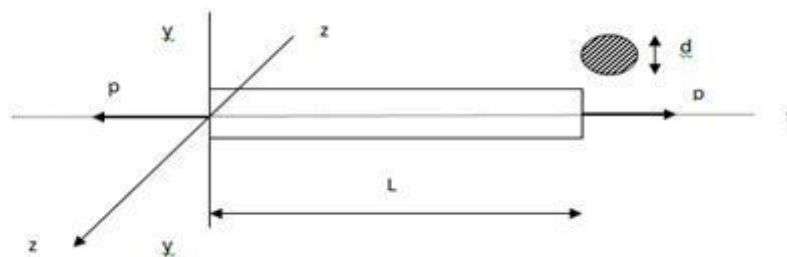


### Exemple

Soit la tige suivante d'une section circulaire de diamètre  $d$  et d'une longueur  $L$  soumise à deux forces axiales  $P$  agissantes sur les deux sections droites des deux extrémités de cette tige.

- Calculer la nouvelle longueur  $L_f$  et le nouveau diamètre  $d_f$ ?

Sachant que  $P = 85 \text{ dan}$  ,  $L = 3 \text{ m}$  ,  $d = 30 \text{ mm}$  ,  $E = 7.10^4 \text{ Mpa}$  ,  $\nu = 1/3$ .

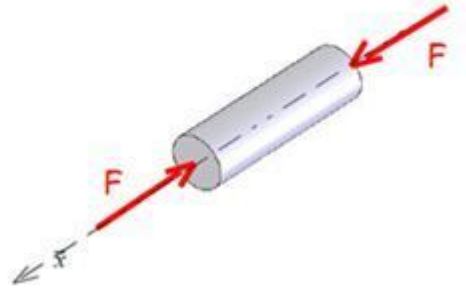


## 2. COMPRESSION SIMPLE



### Définition

Un corps est sollicité à la compression si les efforts provoquant le raccourcissement de celui-ci.



### 2.1. Condition de résistance à la compression

La résistance à la compression est une caractéristique importante d'un matériau qui est soumis à la compression. La condition de résistance s'exprimera alors en compression par la limite pratique à la compression du matériau,  $R_{pc}$ :

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq R_{pc} \quad \text{Avec} \quad R_{pc} = \frac{R_c}{s}$$

$R_{pc}$  : résistance pratique à la compression.

- $R_c$  : limite élastique à la compression.
- $s$  : coefficient de sécurité



### Remarque

La résistance pratique à la compression est la même que celle à la traction, particulièrement pour les aciers doux à mi-durs.

Pour les matériaux fragiles (fontes, béton, aciers très durs...) les résistances pratiques à la compression sont plus faibles.

## 2.2. Systèmes isostatiques et hyperstatiques

### 2.2.1. Systèmes isostatiques

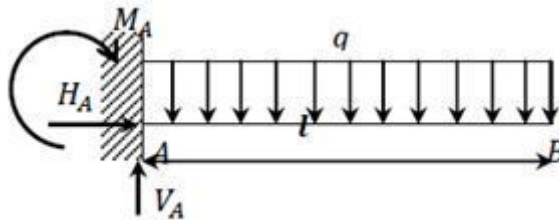
Un système est dit isostatique si on peut déterminer les efforts internes par les équations d'équilibre de la statique.

$$\sum F_H = 0, \quad \sum F_V = 0, \quad \sum M_{/point} = 0$$



#### Exemple

Une poutre de longueur  $L$  et soumise à une charge uniformément répartie .



$$\sum F_V = V_A - ql = 0$$

$$\sum F_H = H_A = 0$$

$$\sum M_{/A} = M_A + ql^2/2 = 0$$

### 2.2.2. Systèmes hyperstatiques

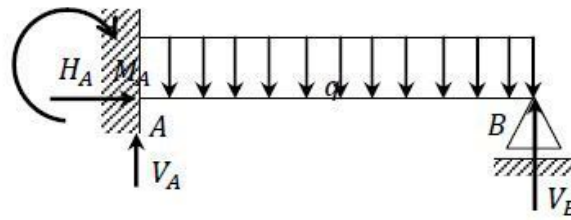
Si le nombre d'équations de la statique ne suffit pas pour déterminer les efforts internes (les inconnues), le système est dit hyperstatique.

Pour résoudre ce système il suffit:

- Écrire les équations d'équilibre statique.
- Établir la relation contrainte -effort et contrainte déformation selon la loi de Hooke  $\Delta L = (N.L)/(E.A)$ .
- Compléter par des équations supplémentaires basées sur des déformations du système.
- Écrire un nombre suffisant d'équations comportant des déformations pour que le nombre total des équations de la statique et de déformation soit égal au nombre de forces inconnues[4].
- Résolution du système d'équations.



### Exemple



Il y a 4 inconnues ( $H_A, V_A, V_B, M_A$ ) le système est une fois hyperstatique.

### Cas des poutres en treillis

La formule ci-dessous permet de déterminer le degré d'hyperstaticité dans le cas des systèmes en treillis :

$$d = b + r - 2n$$

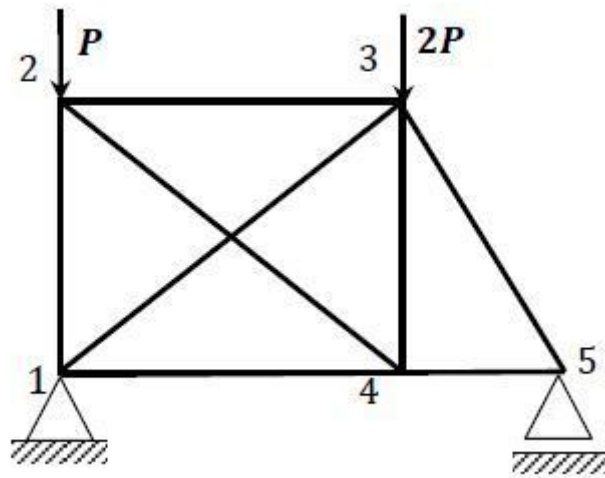
$b$  : Le nombre de barres ou membrures

$n$  : Le nombre de noeuds

$r$  : Le nombre de réactions verticales et horizontal

si  $d = 0$  système est isostatique.

-si  $d > 0$  système est hyperstatique.



*Système en treillis*

$b$  : 8

$n$  : 5

$r$  : 3

$d = b + r - 2n = 1$  (le système 1 fois hyperstatique)

## 2.3. Phénomène de concentration de contraintes



### Définition

Lorsque les pièces étudiées présentent de brusques variations de section (gorge, épaulement, trou de perçage,...), conduit à un affaiblissement de celles-ci et les formules de la résistance des matériaux ne sont plus applicables. Au voisinage du changement de section. La répartition des contraintes n'est plus uniforme et présente des extremums, on dit qu'il y a une concentration de contraintes en ces points.

La contrainte ne varie plus lentement, on doit appliquer un coefficient de concentration de contrainte  $k$

$$\sigma_{Maxi} = K_t \cdot \sigma_0 \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{F}{A} = \frac{N}{A}$$

$K_t$ : Coefficient de concentration de de contrainte



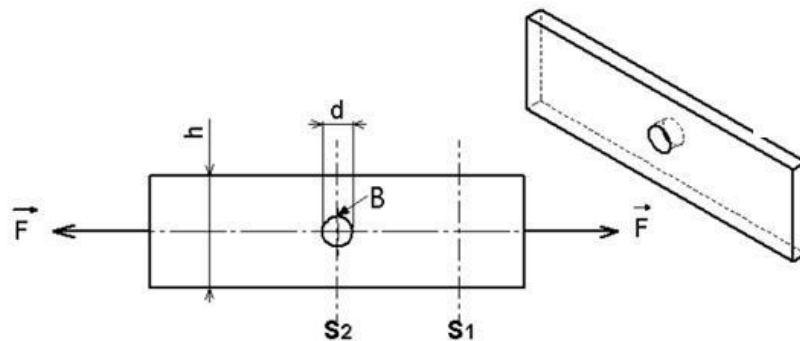
### Rappel

Le coefficient de concentration de de contrainte dépend des dimensions de sections et de leurs positions . $K$  est, en général, à lire dans des abaques.

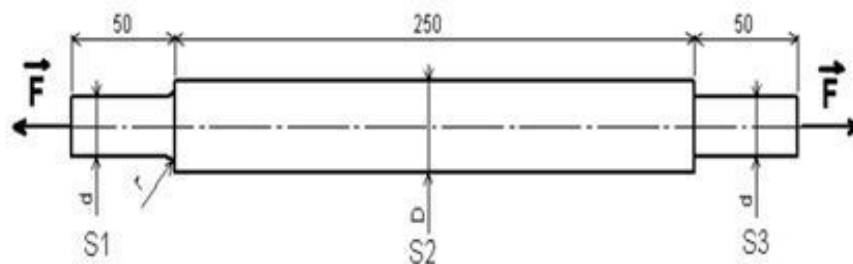


### Exemple

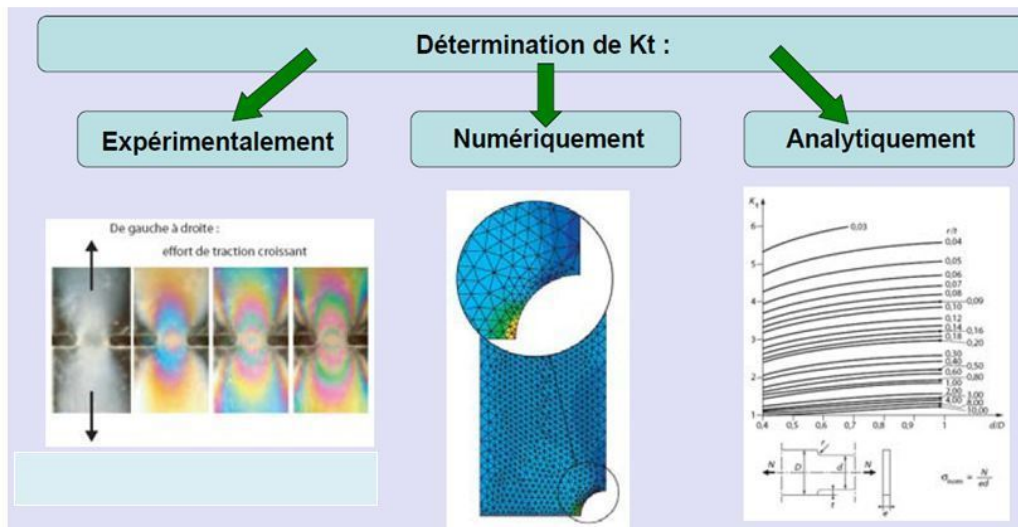
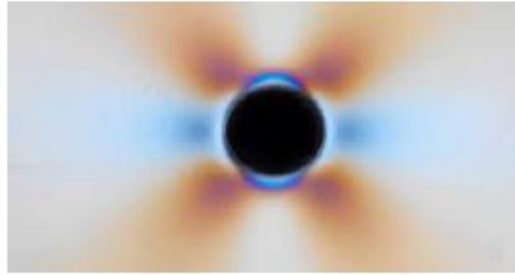
- Plaque percée d'un seul trou



- Arbre avec épaulements



- Concentration de contraintes au voisinage du trou



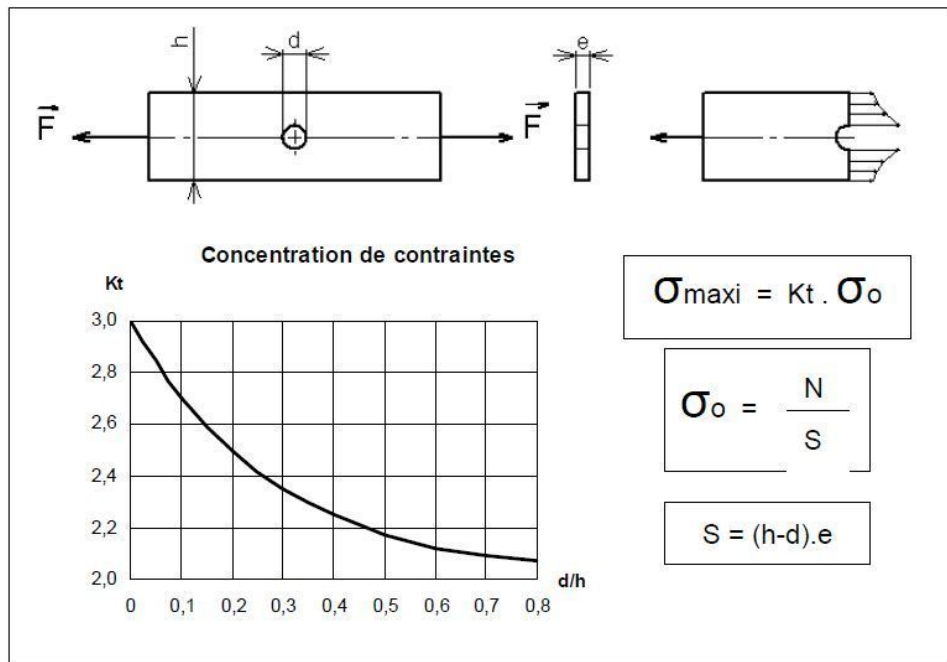
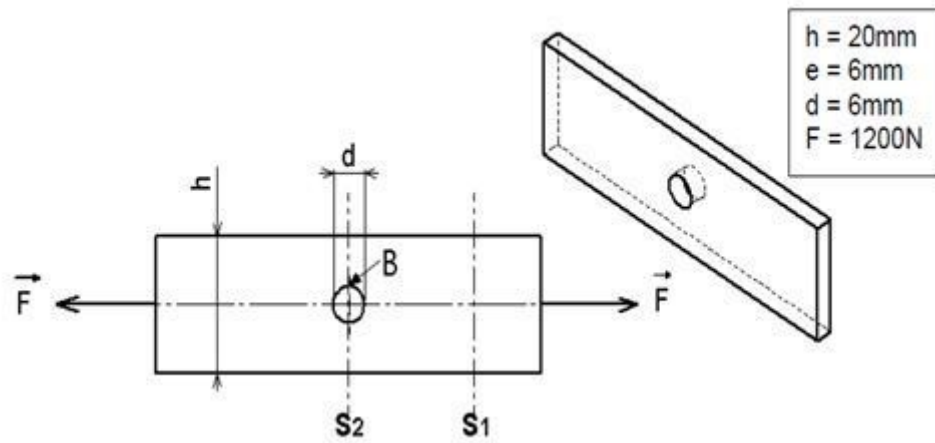
### 3. Exercice

Déterminer la contrainte théorique.

- Calculer la contrainte  $\sigma_1$  dans la section 1 de la poutre.
- Calculer la contrainte  $\sigma_2$  dans la section 2 de la poutre.

Déterminer la contrainte réelle dans la section 2.

- Relever le coefficient de concentration de contraintes  $K_t$  à l'aide de l'abaque ci-dessous.
- Calculer  $\sigma_B$ .



## 4. CISAILLEMENT SIMPLE

### 4.1. Objectifs spécifiques

A l'issue de ce chapitre l'étudiant sera capable de :

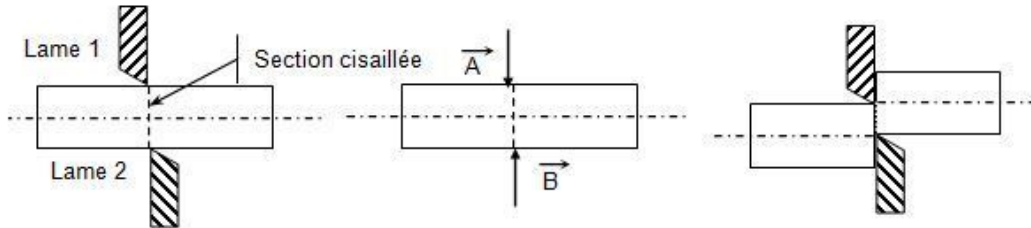
- Déterminer les contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant.
- Identifier les déformations angulaires.
- Vérifier la résistance des assemblages métalliques.

Le temps alloué à ce chapitre est : 1 semaine



### Définition

Une poutre est sollicitée au cisaillement si elle est soumise à des actions qui se réduisent à deux forces directement opposées, dans le même plan P perpendiculaire à la ligne moyenne.



## 4.2. Torseur de cohésion dans $(G; x; y; z)$

Le torseur de cohésion en cisaillement est donné comme suit

$$\left\{ T_{\text{coh}} \right\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$$



### 4.3. Contrainte

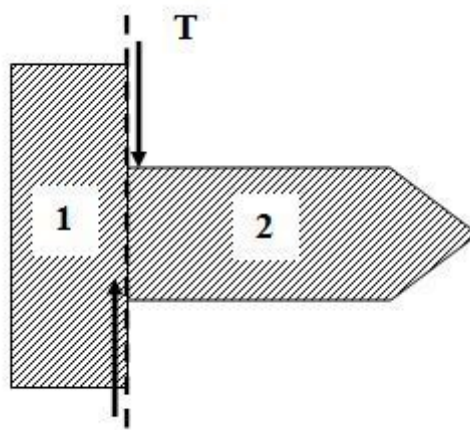
C'est l'intensité de l'effort tranchant par unité de surface.

$$\tau = \frac{T}{A}$$

T : Effort tangentiel (N)

A : Section cisailée (mm<sup>2</sup>)

$\tau$  : Contrainte tangentielle (MPa ou N/mm<sup>2</sup>)

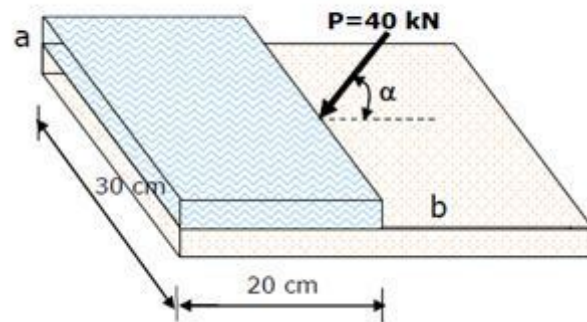


*Pièce soumise à l'effort tranchant*



### Exemple

Calculer la contrainte moyenne sur le plan ab sur la figure ci-dessous.



Solution

La contrainte moyenne sur le plan ab est

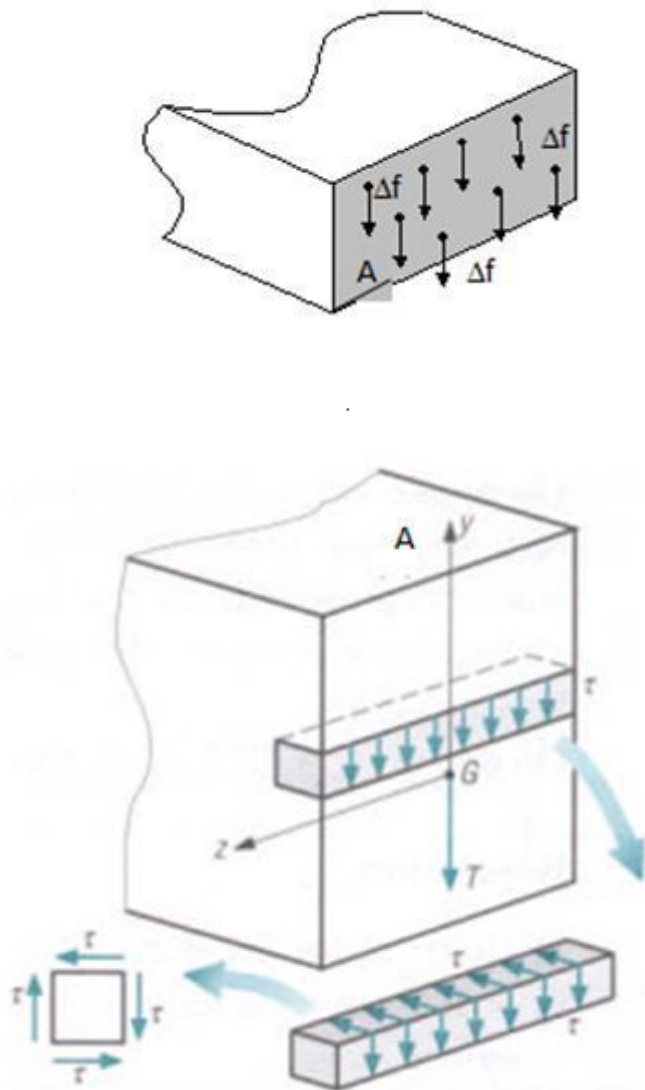
$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{P \cos \alpha}{S}$$

Pour  $\alpha = 30^\circ$

$$\tau = (40 \cdot \sqrt{3}) / (2 \cdot (20 \times 30))$$

#### 4.4. Distribution des contraintes tangentielles

Chaque élément de surface  $\Delta A$  supporte un effort de cisaillement  $\Delta f$ , la contrainte est répartie uniformément dans toute la section cisillée A.



*Distribution des contraintes de cisaillement dans une section (A)*

## 4.5. Déformation angulaire

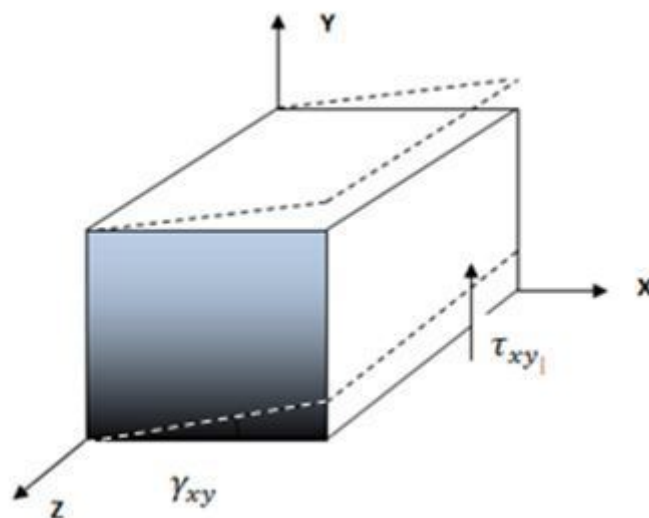
Lorsque les déformations sont élastiques, la contrainte de cisaillement  $\tau$  est proportionnelle à l'angle de glissement .

Le glissement est mesuré par l'angle  $\gamma_{xy}$  appelé angle de glissement (unité : radian) .

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

La déformation de cisaillement est linéaire.

$G$  : Représente le module de coulomb qui caractérise l'élasticité du matériau dans le sens transversal. Unité : (N/mm<sup>2</sup>).



Déformation angulaire



### Remarque

Cette grandeur est proportionnelle au module de Young, en fonction du coefficient de Poisson  $\nu$ , propre à chaque matériau (pour les métaux, ( $G = 0.4 E$ ))

$$G = \frac{E}{[2(1 + \nu)]}$$

Avec : .

- $\nu$  Coefficient de Poisson.
- $E$  : Module de Young propre du matériau.



### Exemple

La contrainte de cisaillement dans un corps métallique est égale à 1050 kg/cm<sup>2</sup>.

Si le module de cisaillement vaut 8400 kN/cm<sup>2</sup>, déterminer la déformation de cisaillement.

#### 4.6. Condition de résistance

$$\tau_{maxi} \leq R_{pg}$$

$$R_{pg} = R_{eg} / s$$

$$\tau_{maxi} = \frac{T}{A} \leq R_{pg}$$

Avec :

- $\tau_{max}$ : Contrainte tangentielle maximale.
- $R_{pg}$ : La résistance pratique de glissement.
- $R_{eg}$  : La résistance d'extension de glissement.
- $s$  : Coefficient de sécurité.

#### 4.7. Assemblage par rivets

Les assemblages par rivets servent aux pièces d'épaisseur faible ou moyenne, comme les tôles et les profilés, en charpente et en chaudronnerie. Ils nécessitent un perçage préalable des pièces à assembler,.

Si le système assemblé se trouve sollicité en traction, l'effort de traction va être transmis au rivet qui va travailler en cisaillement pur.

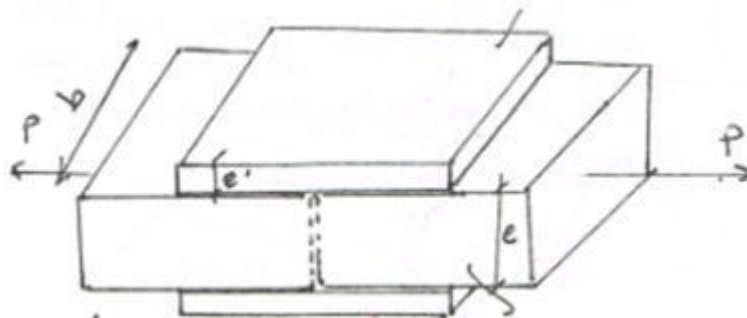
Nous traiterons ci-dessous des exemples d'assemblage par rivets [3]<sup>o</sup>..

### 5. Exercice

Deux tôles métalliques sont assemblées par deux couvre joints réunies par rivets comme le montre la figure ci-dessous.

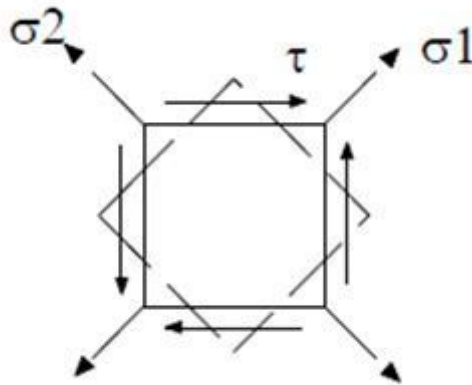
Les deux tôles sont soumis à un effort de traction  $p=20tf$ ,  $d(\text{ rivet}) =18 \text{ mm}$ . Connaissant que  $\sigma_e =1400 \text{ bars}$  et  $\tau_{pe} = 100 \text{ bars}$ .

1. Calculer l'épaisseur (  $e$  ) et (  $e'$  ).
2. Calculer le nombre de rivets (Deux rangés).
3. Vérifier la contrainte de traction dans les tôles



## 6. État de cisaillement pur

Dans l'état de contrainte de cisaillement pur les contraintes principales suivant les plans inclinés à  $45^\circ$  [1]<sup>o</sup>



État de cisaillement pur

## 7. TORSION

### 7.1. Objectifs spécifiques

À l'issue de ce chapitre l'étudiant sera capable de :

- Déterminer les contraintes tangentielles dues au moment de torsion.
- Déterminer le module de déformation transversal.
- Vérifier la condition de rigidité .

Le temps alloué à ce chapitre est : 1 semaine



#### Définition

Une poutre est sollicitée à la torsion simple si elle est soumise à deux couples de moments opposés portés par la ligne moyenne.

Ce type de sollicitation est très fréquenté dans les structures mécaniques telles que les arbres

### 7.2. Moment de torsion

Le moment de torsion  $M_t$  est la somme algébrique des moments des couples appliqués sur un côté de la section.

### 7.3. Moment d'inertie polaire

Pour un arbre cylindrique creux de diamètre extérieur  $D_e$  et de diamètre intérieur  $D_i$ , le moment d'inertie polaire de la section est donné par la formule suivante :

$$I_0 = \pi/32 (D_e^4 - D_i^4).$$

Le moment d'inertie polaire d'un arbre plein s'obtient quand  $D_i=0$ .

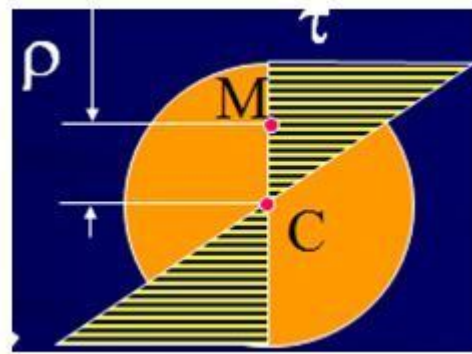
## 7.4. Contrainte de cisaillement en torsion

Dans un arbre cylindrique plein ou creux soumis à un moment de torsion  $M_t$ , la contrainte de cisaillement en torsion  $\tau$  à une distance  $\rho$  de l'axe de l'arbre est donnée par :

$$\tau = \rho / I_0 (M_t).$$

$M_t$ : moment de torsion.

$I_0$ : Moment d'inertie polaire



*répartitions des contraintes au niveau de la section.*

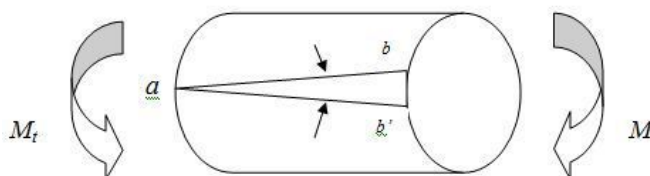


### Remarque

La contrainte max se situe au point le plus éloigné de la fibre neutre.

## 7.5. Déformation de cisaillement

Après l'application du moment de torsion  $M_t$  l'angle ( $\gamma_{xy}$ ) exprimé en radians entre la position finale (a- b') et la position initiale (a-b) définit la déformation de cisaillement de la surface.



*Déformation de cisaillement*

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$\gamma_{xy}$ : déformation angulaire .

$\tau_{xy}$ : contrainte tangentielle.

G : Module de coulomb.

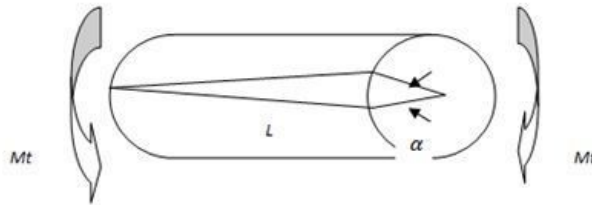
## 7.6. Angle de torsion

Lorsque un arbre de longueur  $L$  est soumis à un moment de torsion  $M_t$  constant sur la longueur, l'angle de torsion ( $\alpha$ ) est donné par la formule suivante :

$$\alpha = \frac{M_t L}{G I_0}$$

Avec :

- $\alpha$  : angle de torsion.
- $M_t$  : moment de torsion
- $L$  : longueur de l'arbre.
- $G$  : module de Coulomb.
- $I_0$  : moment d'inertie polaire.



*Angle de torsion*

## 7.7. Torseurs de cohésion , dans $(G;x;y;z)$

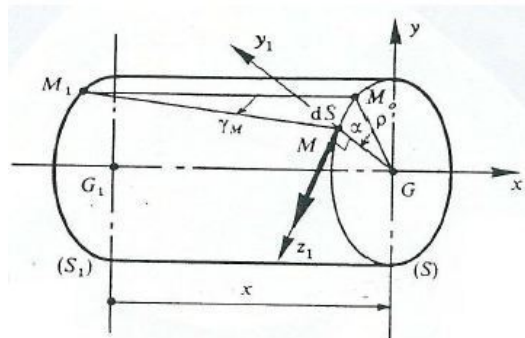
$$\left\{ T_{\text{gcoh}} \right\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$



### 7.8. Angle unitaire de torsion

C'est la déformation angulaire relative entre deux sections distantes d'une longueur  $x$ .

$$\vartheta = (\alpha/x) \text{ (unité : rad/mm)}$$



### 7.9. La contrainte tangentielle due à la torsion

$$\tau = G.\vartheta.\rho$$

Avec :

- $G$  : Module de cisaillement .
- $\vartheta$  : Angle de torsion unitaire ( rad/mm<sup>2</sup>).
- $\rho$  : Distance entre la fibre neutre et la fibre la plus éloignée de la section.

### 7.10. Relation entre moment et angle de torsion.

$I_G$  : moment quadratique polaire.

$\rho$  : distance entre la fibre neutre et la fibre la plus éloignée de la section

$$M_t = G.\vartheta.I_G$$

$$\tau = (M_t / I_G) / \rho$$



*Rappel*

$$I_G = (\pi d^4) / 32$$

### 7.11. Condition de résistance

$$\tau_{maxi} \leq R_{pg}$$

## 8. Exercice

Quelle est la contrainte de cisaillement maximale produite dans un arbre de 50mm de diamètre par un moment de torsion de 1Kn .m ?

Quel est l'angle de torsion pour un arbre de 1 m de long ? Le matériau est l'acier pour lequel  $G=85$  Gpa. Le comportement est élastique.

## 9. FLEXION



### Définition

Une poutre est soumise à la flexion lorsque les forces qui lui sont appliquées tendent à faire varier sa courbure



*Poutre soumise à une flexion*

### 9.1. Objectifs spécifiques

À l'issue de ce chapitre l'étudiant sera capable de :

- Différencier entre la flexion pure et la flexion simple.
- Déterminer le moment et l'effort tranchant maximum.
- Déduire les sections dangereuses.
- Calculer les contraintes normales et tangentielles maximales .
- Dimensionner adéquatement.
- Vérifier les conditions de rigidité et de résistance selon des critères.

Le temps alloué à ce chapitre est : 1 semaine

### 9.2. Hypothèses

- a) Les déformations sont élastiques et suffisamment petites pour ne pas modifier l'intensité des forces ni leurs distances respectives.
- b) Toute fibre demeurant dans un plan de symétrie, reste dans ce plan pendant la déformation.
- c) Hypothèse de Navier-Bernoulli: les sections droites de la poutre demeurent planes et perpendiculaires à l'axe de celle-ci après déformation.

### 9.3. Différents types de flexion

Les différents types de flexion

<i>Flexion pure</i>	$\{T_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$ ou $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
<i>Flexion plane ou composée</i>	$\{T_C\} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$ ou $\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$
<i>Flexion plane simple</i>	$\{T_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$ ou $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$
<i>Flexion déviée</i>	$\{T_C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}$

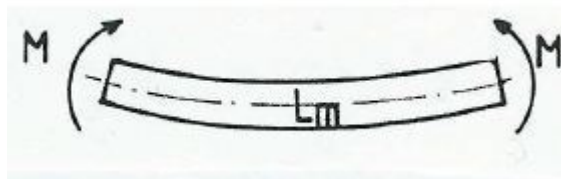
Différents types de flexion

### 9.4. FLEXION PURE



#### Définition

Lorsque tous les efforts internes qui agissent sur un élément sont nuls, seul un moment fléchissant  $M_y$  ou  $M_z$  n'est pas nul est dit état de flexion plane pure [1]↗



Exemple d'une flexion pure

#### 9.4.1. Torseurs de cohésion , dans (G;x;y;z)

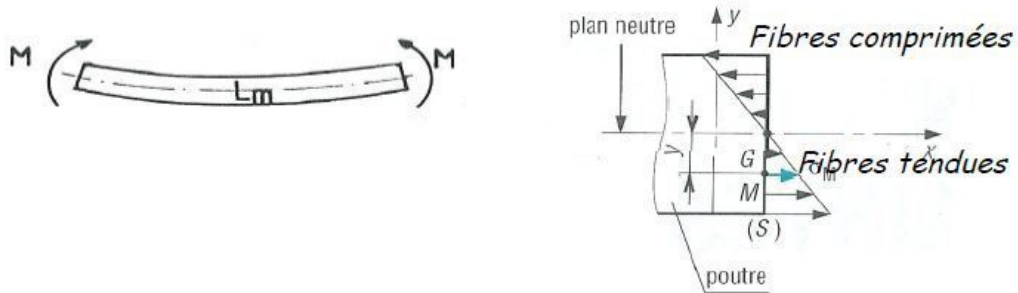
$$\{T_{\text{coh}}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$$

### 9.4.2. Contraintes

Répartition des contraintes dans la section :

La contrainte normale  $\sigma$  en un point M d'une section droite est proportionnelle à la distance  $y$  entre ce point et le plan moyen passant par G.

- Toutes les fibres situées à la distance  $y$  du plan moyen ont même contrainte.
- Si la fibre est tendue, la contrainte est positive. Si la fibre est comprimée, la contrainte est négative.



Répartition des contraintes dans la section



#### Remarque

La fibre la plus sollicitée est également la plus éloignée du plan moyen

### 9.4.3. Condition de résistance

$$\sigma_x(y) = \frac{M_z}{I_z} y$$

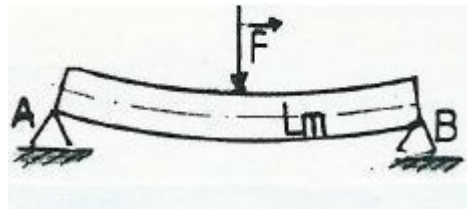
## 9.5. FLEXION SIMPLE



### Définition

On entend par flexion simple un mode de sollicitation tel que dans les sections droites de la poutre, il existe deux composantes des efforts intérieurs: le moment fléchissant  $M_{fz}$  (ou  $M_{fy}$ ) et l'effort tranchant  $T_Y$  (ou  $T_Z$ ).

### Flexion simple



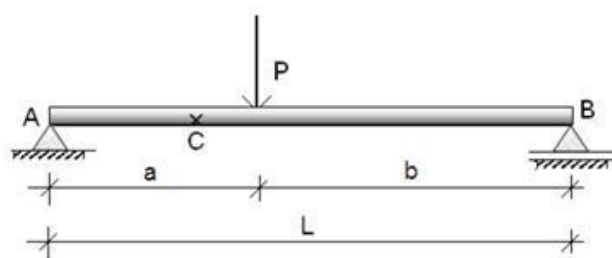
#### 9.5.1. Torseurs de cohésion, dans $(G;x;y;z)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\text{gcoh}} \\ G \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{array} \right\}_G$$

#### 9.5.2. Relation entre Effort tranchant, moment fléchissant (poutre soumise à une flexion simple)

Soit la poutre ci-dessous soumise à la flexion simple. en Imaginant une coupure en un point C qui divise la poutre en deux parties distinctes gauche et droite.

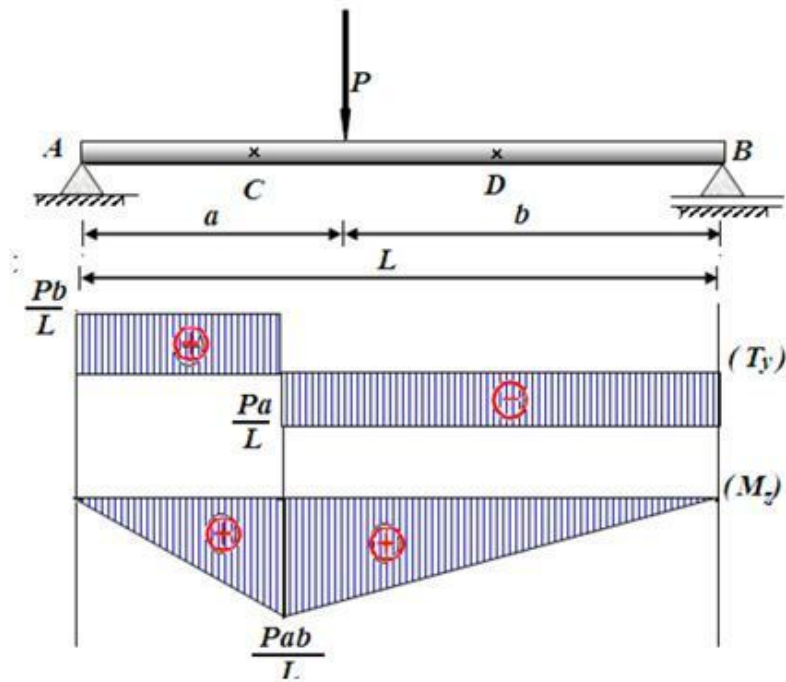
Chacune de ces deux parties est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs qu'elle reçoit et sous l'action des effets de l'autre partie (Efforts intérieurs)



*poutre sollicitée en flexion simple*

Chacune des deux partie agit sur l'autre de sorte que: [3]↗

- Tous les mouvements horizontaux, verticaux et de rotation d'une partie par rapport à l'autre sont nuls.
- Chaque partie est en équilibre pour qu'il y ait concordance en signe entre les deux parties.
- L'effort tranchant  $T(x)$  dans une section d'abscisse  $x$ , séparant la poutre orientée en une partie gauche et une partie droite, est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur la partie gauche.
- Le moment fléchissant  $M(x)$  dans une section d'abscisse  $x$ , séparant la poutre orientée en une partie gauche et une partie droite, est la somme des moments extérieurs (dus aux couples concentrés et aux efforts d'action et de réaction) s'exerçant sur la partie gauche.



Diagrammes de l'effort tranchant et moment fléchissant

$$\frac{dM}{dx} = T$$



### Fondamental

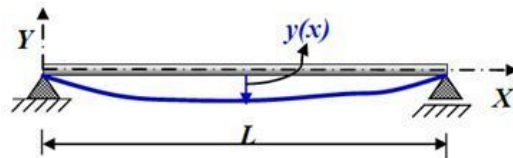
L'effort tranchant est la dérivée par rapport à l'abscisse  $x$  du moment fléchissant.

## 9.5.3. Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (flèche)

*Définition*

Une poutre se déforme sous l'effet des sollicitations auxquelles elle est soumise, on appelle une flèche ou une déformée, le déplacement du centre de gravité de la section

$$y''(x) = \frac{M(x)}{EI}$$



*Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple*

$y''(x)$  : La dérivée seconde de la flèche par rapport à  $x$

$M(x)$  : Le moment fléchissant à la section d'abscisse  $x$ .

$E$  : Le module d'élasticité longitudinale (module de Young).

$I$  : Le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe  $\Delta$  passant par le centre de gravité et perpendiculaire au plan moyen de la poutre.

## 9.6. Calcul de résistance en flexion

La vérification d'une poutre en flexion se fait par rapport aux contraintes normales maximales dans la section.

## 9.6.1. Pour une section symétrique

$$|\sigma_{\max}| = \left| \frac{My_{\max}}{I_z} \right| \leq \min([\sigma_-], [\sigma_+])$$

## 9.6.2. Pour une section non symétrique

$$\text{Si } [\sigma_-] = [\sigma_+] = [\sigma] \Rightarrow \max(|\sigma_{\max}^-|, |\sigma_{\max}^+|) \leq [\sigma]$$

$$\text{Si } [\sigma_-] \neq [\sigma_+] \quad \begin{cases} |\sigma_{\max}^-| \leq [\sigma_-] \\ |\sigma_{\max}^+| \leq [\sigma_+] \end{cases}$$

9.6.3. La contrainte tangentielle

$$\tau_{xy} = \frac{T_y \cdot S_{Iz}(y)}{I_z \cdot b(y)}$$

$$S_{Iz}(y) = \int_{S_i} y dS$$

$T_y$  : L'effort tranchant selon Y .

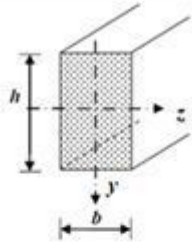
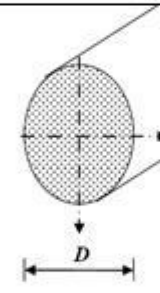
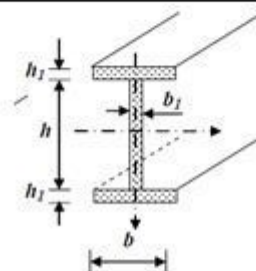
$S_{Iz}$ : Le moment statique.

E : Le module d'élasticité longitudinale (module d'Young).

I : Le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe  $\Delta$  passant par le centre de gravité et perpendiculaire au plan moyen de la poutre.

est le moment statique de la surface située au dessus de la coordonnée y et par rapport à l'axe z

$b(y)$  est la largeur de la fibre étudiée correspondant à la coordonnée y.

Section	Moment d'inertie
	$I_z = \frac{bh^3}{12}$
	$I_z = \frac{\pi R^4}{4}$
	$I_z = 2[bh_1^3/12 + ((h+h_1)/2)(bh_1) + bh^3/12]$

Exemples de sections usuelles.



## 9.7. Système hyperstatique (statiquement indéterminé)

Quand le nombre de réactions inconnues dépasse le nombre d'équations statique, il est nécessaire de les compléter par des équations basées sur les déformations. La résolution du système hyperstatique s'effectue à l'aide de la méthode des forces et la méthode des déplacements. Dans la méthode des forces, les inconnues sont des forces. Ces inconnues pouvant être des efforts internes, des réactions d'appui, des moments de flexion (ou des paires de moments de flexion, etc.). Pour résoudre le système, des conditions supplémentaires de déformation sont exprimées. Ces conditions de déformation se nomment conditions de compatibilité cinématique.

Dans la méthode des déplacements, les inconnues sont des déplacements. Le terme «déplacements» doit également être compris dans son sens général, les inconnues pouvant également être des rotations ou des déplacements relatifs. A la différence de la méthode des forces, la méthode des déplacements s'applique aussi bien à des structures hyperstatiques qu'isostatiques. Concrètement, des conditions supplémentaires d'équilibre sont exprimées pour résoudre le système [5].

On décompose le problème en deux ou plus, problème isostatique dont la superposition est équivalente au problème complet.

Les diagrammes des efforts intérieurs s'obtiennent par superposition.

### 9.7.1. Méthode des forces

La méthode des forces s'applique aux structures hyperstatiques lorsque les liaisons sont rigides et parfaites. Elle est basée sur le choix d'un système de base qui permet d'identifier les réactions surabondantes et aussi le principe de superposition du système isostatique simple avec les charges réelles et des systèmes virtuels avec une charge unitaire.

#### Principe de la méthode des forces

Le principe de cette méthode consiste à remplacer la structure hyperstatique en une structure isostatique équivalente c'est-à-dire que les liaisons surabondantes sont remplacées par des réactions inconnues qu'il faut calculer.



### 9.7.2. La méthode des déplacements

Dans cette méthode les rotations et les translations sont les inconnues.

Le nombre d'inconnues est égal au nombre de rotations des noeuds intermédiaires rigides  $N_r$  et le nombre de translations  $N_t$  du portique

$$N_t = 2n - (b + 1)$$

$n$  : Nombre total de noeuds (noeuds et appuis).

$b$  : Nombre de barres.

$l$  : Nombre de liaisons (réactions) verticales ou horizontales.

### Résolution d'un système hyperstatique par la méthode des déplacements

Pour résoudre les différents problèmes hyperstatique par la méthode des déplacements il suffit de respecter les étapes suivantes :

- Déterminer le nombre d'inconnues (  $N_r$  ,  $N_t$ ).
- Écrire les  $n$  équations canoniques.
- Choisir le système de base (système isostatique le plus simple)
- Tracer le diagramme des moments fléchissant  $M_0$  du système isostatique due aux charges extérieures (  $Z_1=Z_2=.....Z_n=0$  )
- Tracer les diagrammes ou épures unitaires  $m_i$  (1,2...n) correspondant au système isostatique sans charges extérieures et avec  $Z_i=1$  et les autres inconnus nuls.
- On calcul tous les coefficients de réaction(  $r_{ij}$  ,  $R_{i0}$  ) à l'aide des diagrammes.
- Résolution du système d'équations canoniques pour obtenir les déplacements des noeuds.
- Correction des épures unitaires

$$m_i^* = m_i X_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

$$m_1^* = m_1 Z_1 ; m_2^* = m_2 Z_2 ; \dots ; m_n^* = m_n Z_n$$

- On fait la somme des épures unitaires corrigées

$$\sum m_i^* = m_1^* + m_2^* + \dots + m_n^*$$

- Le diagramme des moments fléchissants final du système hyperstatique réel en faisant la somme des moments suivants

$$M_{final} = M_0 + \sum m_i^*$$

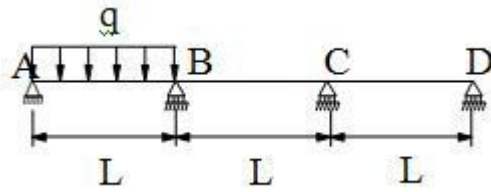
### 9.7.3. Hypothèses

Pour que le principe de superposition soit valide, il faut que:

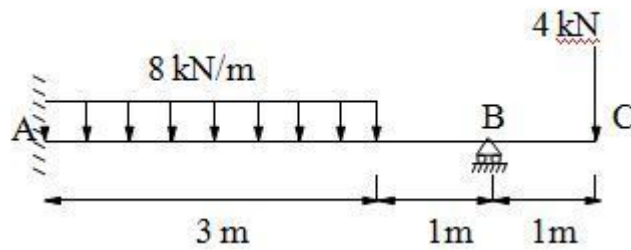
- La loi de comportement du matériau utilisé soit linéaire .
- Les déplacements soient petits devant les dimensions de la structure.

## 10. Exercice

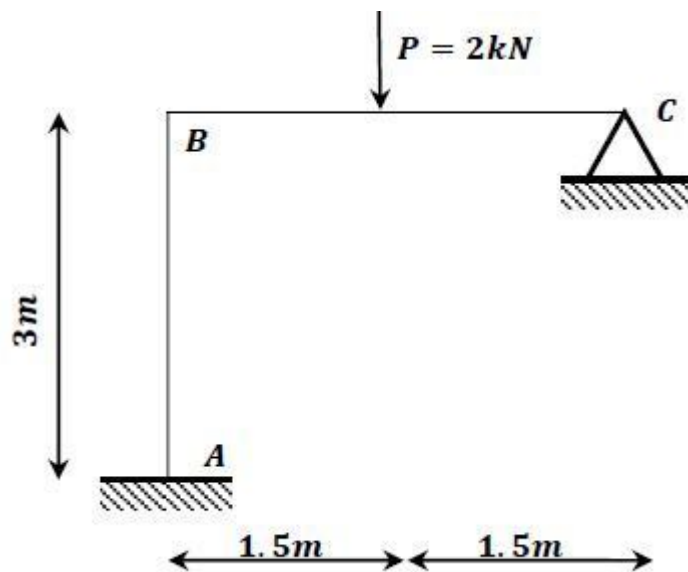
Déterminer les réactions aux appuis de la poutre continue ci-contre:



Déterminer la réaction de l'appui B si au cours du chargement de la poutre, cet appui s'affaisse de 3 mm. On donne  $EI = 4 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{m}^2$



On considère le portique suivant, construire le diagramme du moment fléchissant, de l'effort tranchant et de l'effort normal.  $EI$  est constante.





# Références



- [1]  
Nouredine Bourahla « résistance des matériaux de base » le groupe économique de contrôle technique de construction
- [2]  
Pierre Badel « Cours de résistance des matériaux » Ecole des Mines Saint Etienne Cycle Préparatoire Médecin-Ingénieur 2011-2012.
- [3]  
Zamila HARICHANE «Résistance des Matériaux RDM-I- RDM-II » Septembre 2011
- [4]  
William A.Nash "résistance des Matériaux" série Schaum cours et problèmes.
- [5]  
Pierino Lestuzzi et Léopold Pflug Extrait du titre "Structures en barres et poutres" (TGC volume 4) Publié aux Presses polytechniques et universitaires romandes
- [6]  
Mohammed MEKKI " Calcul des structures hyperstatiques Cours et exercices corrigés"Faculté d'Architecture et de Génie Civil Université des Sciences et de la Technologie d'Oran -Mohammed BOUDIAF-